Escuela Profesional de Ingeniería Mecánica, Mecánica Eléctrica y Mecatrónica

LABORATORIO N° 9: MÉTODO DE LA ELIMINACIÓN DE GAUSS

CURSO: MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS

GRUPO: 08

DOCENTE: SILES NATES FERNANDO

INTEGRANTES DEL GRUPO:

- DIAZ PORTUGAL PIERO ALEXANDER
- PERALTA HERRERA RENATO JOSUE
- YLLA GARCÍA SERGIO ALEXANDER

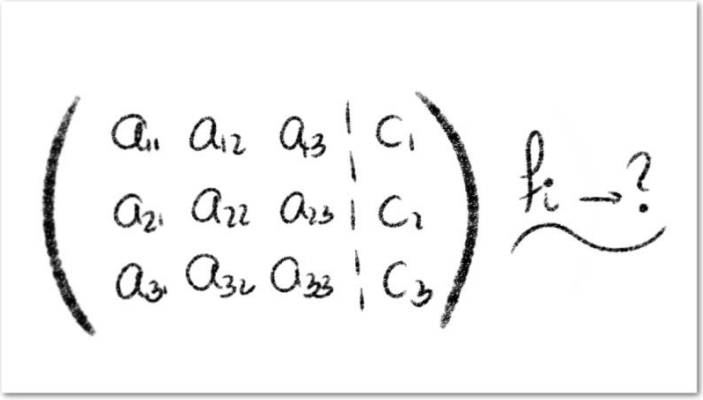
FASE II - SEMESTRE IMPAR

AREQUIPA – 2023

Universidad Católica de Santa María

I. MARCO TEÓRICO

El método de eliminación de Gauss es un algoritmo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El objetivo es transformar la matriz de coeficientes del sistema en una forma triangular superior mediante una serie de operaciones elementales, como la eliminación de variables.



El método de eliminación de Gauss es eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales y tiene aplicaciones en diversos campos, como la física, la ingeniería y la ciencia de datos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que puede haber casos en los que el método no sea adecuado, como cuando la matriz de coeficientes es singular o cuando presenta problemas de estabilidad numérica.

Para levar a cabo el método se realizan los siguientes pasos:

- Etapa de eliminación: Se selecciona un elemento pivote en la primera columna y se utiliza para eliminar los coeficientes de la variable correspondiente en las filas inferiores. Se repite este proceso para cada columna restante, avanzando de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Esto resulta en una matriz triangular superior.

- Sustitución hacia atrás: Una vez que se obtiene la forma triangular superior, se resuelven las ecuaciones resultantes desde la última ecuación hasta la primera, despejando las variables una a una. Esto se conoce como sustitución hacia atrás.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} -\frac{131}{24} \\ \frac{121}{24} \\ \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

II. CASOS PROPUESTOS

1. CASO PROPUESTO N^{O}1

$$3x - y + 2z = 5$$
$$-x + 4y + 2z = 11$$
$$2x + 3y + 2z = 12$$

$$\begin{matrix} y & x & z & \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} F1 = F1(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2 = F1(-4) + F2 \\ F3 = F1(-3) + F3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 11 & 10 & 31 \\ 0 & 11 & 8 & 27 \end{pmatrix} F2 = F2\left(\frac{1}{11}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 10/11 & 31/11 \\ 0 & 11 & 8 & 27 \end{pmatrix} F3 = F2(-11) + F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 10/11 & 31/11 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} F3 = F3\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 10/11 & 31/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} y & x & z & \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 10/11 & 31/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Resolvemos las ecuaciónes

$z = 2$

$$x + \left(\frac{10}{11}\right) z = \frac{31}{11}$$
$$x + \left(\frac{10}{11}\right)(2) = \frac{31}{11}$$

$x = 1$

$$y - (3)x - (2)z = -5$$
$$y - (3)1 - (2)2 = -5$$
$$y = -5 + 3 + 4$$
$y = 2$

SOLUCIÓN:
$x = 1$
$y = 2$
$z = 2$

2. CASO PROPUESTO N^{O}2

$$4x + y - 2z = 1$$
$$3x + y + 3z = 10$$
$$6x + 2y + z = 10$$

$$\begin{matrix} y & x & z & \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} F2 = F1(-1) + F2 \\ F3 = F1(-2) + F3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z & x & y & \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad F2 = F2(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} F3 = F2(2) + F3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \qquad F3 = F3(-1/5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} y & x & z & \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Resolvemos las ecuaciónes

$z = 2$

$$x - (5)z = -9$$
$$x - (5)(2) = -9$$

$x = 1$

$$y + (4)x - (2)z = 1$$
$$y + (4)1 - (2)2 = 1$$

$y = 1$

Tenemos como solución:

$x = 1$
$y = 1$
$z = 2$

3. CASO PROPUESTO N°6

$$3x - 2y + 7z = -5$$
$$5x + 5y - 4z = 1$$
$$4x + 3y + 6z = 7$$

$$\begin{matrix} x & y & z & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & -5 \\ 5 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} F1 = F1\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 5 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} F2 = F1(-5) + F2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 25/3 & -47/3 & 28/3 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} F3 = F1(-4) + F3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 25/3 & -47/3 & 28/3 \\ 0 & 17/3 & -10/3 & 41/3 \end{pmatrix} F2 = F2\left(\frac{3}{25}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -47/25 & 28/25 \\ 0 & 17/3 & -10/3 & 41/3 \end{pmatrix} F3 = F2\left(-\frac{17}{3}\right) + F3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -47/25 & 28/25 \\ 0 & 0 & 183/25 & 183/25 \end{pmatrix} F3 = F3\left(\frac{25}{183}\right)$$

$$\begin{matrix} x & y & z & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -47/25 & 28/25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos las ecuaciones

$z = 1$

$$y + \left(\frac{-47}{25}\right) z = \frac{28}{25}$$
$$y + \left(\frac{-47}{25}\right)(1) = \frac{28}{25}$$
$$y = \frac{28}{25} - \left(\frac{-47}{25}\right)$$
$y = 3$

$$x + \left(\frac{-2}{3}\right) y + \left(\frac{7}{3}\right) z = -\frac{5}{3}$$
$$x + \left(\frac{-2}{3}\right)(3) + \left(\frac{7}{3}\right)(1) = -\frac{5}{3}$$
$$x + (-2) + \left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$
$$x = -\frac{5}{3} - (-2) - \left(\frac{7}{3}\right)$$
$x = -2$

SOLUCIÓN:
$x = -2$
$y = 3$
$z = 1$

4. CASO PROPUESTO N^{O}7

$$2x + y + z = 1$$
$$4x + y = -2$$
$$-2x + 2y + z = 7$$

$$\begin{matrix} x & y & z & \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} z & x & y & \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad F3 = F1(-1) + F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad F2 = F2\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad F3 = F2(4) + F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F3 = F3\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} z & x & y & \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos las ecuaciones

$y = 2$

$$x + \left(\frac{1}{4}\right)y = -\frac{1}{2}$$
$$x + \left(\frac{1}{4}\right)(2) = -\frac{1}{2}$$
$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$x = -1$

$$z + (2)x + (1)y = 1$$
$$z + (2)(-1) + (1)(2) = 1$$
$$z + (-2) + (2) = 1$$
$$z = 1 - (-2) - (2)$$
$z = 1$

SOLUCIÓN:
$x = -1$
$y = 2$
$z = 1$

III. CASO EJEMPLO UTILIZANDO MATLAB

Se implementará el método de la eliminación de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones no lineales.

- La matriz A se combina con el vector B para formar una matriz ampliada.
- Se realiza un bucle para cada fila p de la matriz A. En cada iteración, se itera sobre las filas restantes y se elimina el elemento A(k,p) de la fila k mediante operaciones aritméticas.
- Después de la eliminación de Gauss, la matriz A se transforma en una forma triangular superior, con ceros debajo de la diagonal principal.
- Se calculan las soluciones del sistema resolviendo las ecuaciones a partir de la última fila de la matriz A, dividiendo los términos independientes por los elementos diagonales correspondientes.
- Ingresamos una matriz A de 3*3 y una matriz B de 1*3.
- Finalmente digitamos el nombre del programa: "eliminacion(A,B)"

eliminacion.m
/MATLAB Drive/eliminacion.m

```
function y=eliminacion(A,B)
[n n]=size(A);
A=[A';B']';
x=zeros (n,1);
for p=1:n
    for k=[1:p-1,p+1:n];
        m=-A(k,p)/A(p,p);
        A(k,:)=A(k,:)+m*A(p,:)
    end
end

x=A (:,n+1)./diag(A)
```

Vista del command window:

Command Window

```
A =

    3.0000         0         0    1.5000
         0    3.3333    0.0000  -11.6667
         0         0   -0.4000   -3.0000


x =

    0.5000
   -3.5000
    7.5000
```

Vista del workspace:

Workspace

Name	Value	Size	Class
A	[3,1,0;-1,3,...	3×3	double
B	[-2;4;2]	3×1	double

IV. CASO PROPUESTO N°8

1. CÓDIGO 1

Algoritmo:

1. Se solicita al usuario ingresar la matriz de coeficientes A y el vector de términos independientes b.
2. Se realiza la eliminación gaussiana sobre la matriz A y el vector b para obtener una matriz triangular superior. Esto se hace mediante el uso de un bucle for doble que itera a través de las filas y columnas de la matriz A y aplica la eliminación gaussiana.
3. Se muestra la matriz triangular superior resultante en la pantalla.
4. Se asigna la matriz triangular superior a la variable U.
5. Se calcula la solución del sistema de ecuaciones lineales utilizando la matriz triangular superior U y el vector de términos independientes b mediante la sustitución hacia atrás.
6. Se muestra la solución del sistema en la pantalla.

Código:

```
% Ingreso de la matriz
A = input('Ingrese la matriz de coeficientes de 3x3: ');

% Ingreso del vector de términos independientes
b = input('Ingrese el vector de términos independientes de 3x1: ');

% Eliminación gaussiana
for k = 1:2
    for i = k+1:3
        factor = A(i,k) / A(k,k);
        A(i,:) = A(i,:) - factor * A(k,:);
        b(i) = b(i) - factor * b(k);
    end
end

% Matriz triangular superior
U = A;

% Solución
x(3) = b(3) / U(3,3);
x(2) = (b(2) - U(2,3)*x(3)) / U(2,2);
x(1) = (b(1) - U(1,2)*x(2) - U(1,3)*x(3)) / U(1,1);

% Mostrar la matriz triangular superior
fprintf('La matriz triangular superior obtenida mediante eliminación
gaussiana es:\n')
disp(U)

% Mostrar la solución del sistema
fprintf('La solución del sistema es: x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n',
x(1), x(2), x(3))
```

Vista de la ventana de comandos

```
Ingrese la matriz de coeficientes de 3x3:
[3 -2 1; 4 3 -3; -6 4 -7]
Ingrese el vector de términos independientes de 3x1:
[5 1 3]
La matriz triangular superior obtenida mediante eliminación gaussiana es:
    3.0000   -2.0000    1.0000
         0    5.6667   -4.3333
         0         0   -5.0000

La solución del sistema es: x1 = 0.5412, x2 = -2.9882, x3 = -2.6000
```

Explicación:

1. **A = input('Ingrese la matriz de coeficientes de 3x3: ');**: esta línea solicita al usuario que ingrese la matriz de coeficientes A. La matriz A es una matriz cuadrada de 3x3 que contiene los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.
2. **b = input('Ingrese el vector de términos independientes de 3x1: ');**: esta línea solicita al usuario que ingrese el vector de términos independientes b. El vector b es un vector columna de 3x1 que contiene los valores de los términos independientes en el sistema de ecuaciones lineales.
3. **for k = 1:2**: este bucle for doble se utiliza para realizar la eliminación gaussiana sobre la matriz A y el vector b. El bucle se ejecuta dos veces porque se necesitan dos iteraciones para reducir la matriz A a una matriz triangular superior.
4. **for i = k+1:3**: este bucle for se utiliza para iterar a través de las filas de la matriz A que se encuentran por debajo de la diagonal principal. Estas filas se eliminan mediante la eliminación gaussiana.
5. **factor = A(i,k) / A(k,k);**: este cálculo se utiliza para calcular el factor de eliminación utilizado en la eliminación gaussiana. El factor se calcula dividiendo el elemento de la fila actual (i) y la columna actual (k) de la matriz A por el elemento de la diagonal principal (k, k) de la matriz A.
6. **A(i,:) = A(i,:) - factor * A(k,:);**: esta línea actualiza la fila i de la matriz A para realizar la eliminación gaussiana. Se multiplica la fila k por el factor de eliminación y se resta de la fila i.
7. **b(i) = b(i) - factor * b(k);**: esta línea actualiza el elemento i del vector b para realizar la eliminación gaussiana. Se multiplica el elemento k del vector b por el factor de eliminación y se resta del elemento i.
8. **U = A;**: esta línea se utiliza para asignar la matriz triangular superior resultante a la variable U. La matriz triangular superior tiene todos los elementos por debajo de la diagonal principal igual a cero.

9. **x(3) = b(3) / U(3,3);**: esta línea se utiliza para calcular la solución x3 del sistema de ecuaciones lineales utilizando la sustitución hacia atrás. El valor de x3 se calcula dividiendo el elemento 3 del vector b por el elemento 3,3 de la matriz triangular superior U.
10. **x(2) = (b(2) - U(2,3)*x(3)) / U(2,2);**: esta línea se utiliza para calcular la solución x2 del sistema de ecuaciones lineales utilizando la sustitución hacia atrás. El valor de x2 se calcula reemplazando los valores de x3 y los elementos 2,3 y 2,2 de la matriz triangular superior U en la ecuación correspondiente.
11. **x(1) = (b(1) - U(1,2)*x(2) - U(1,3)*x(3)) /U(1,1);:** esta línea se utiliza para calcular la solución x1 del sistema de ecuaciones lineales utilizando la sustitución hacia atrás. El valor de x1 se calcula reemplazando los valores de x2, x3 y los elementos 1,2, 1,3 y 1,1 de la matriz triangular superior U en la ecuación correspondiente.
12. **fprintf('La matriz triangular superior obtenida mediante eliminación gaussiana es:\n'):** esta línea se utiliza para imprimir en pantalla un mensaje para informar al usuario que la matriz triangular superior se mostrará a continuación.
13. **disp(U)**: esta línea se utiliza para mostrar la matriz triangular superior resultante en la ventana de comandos.
14. **fprintf('La solución del sistema es: x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n', x(1), x(2), x(3))**: esta línea se utiliza para imprimir en pantalla la solución del sistema de ecuaciones lineales. Los valores de x1, x2 y x3 se muestran con un formato específico utilizando la función fprintf(). Los valores de x1, x2 y x3 se obtienen de las soluciones calculadas anteriormente utilizando la sustitución hacia atrás.

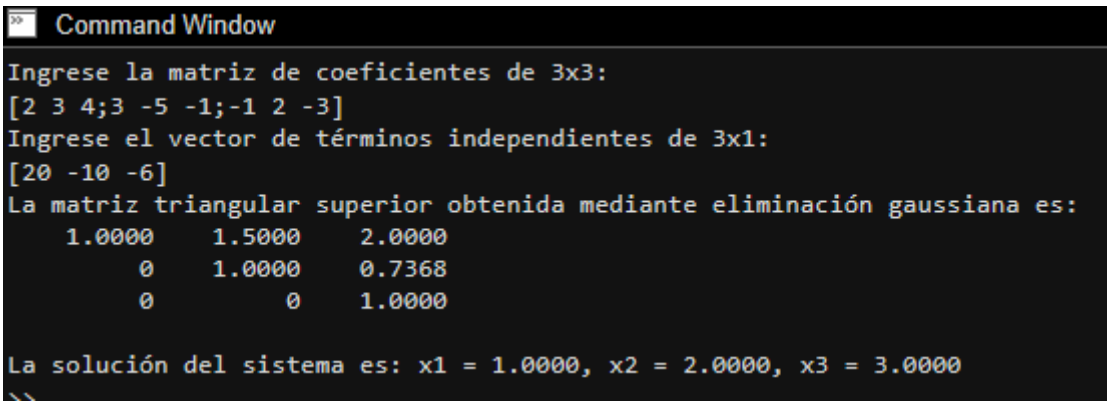
2. CÓDIGO 2

Algoritmo:

1. Ingresar una matriz de coeficientes de tamaño 3x3 y un vector de términos independientes de tamaño 3x1.
2. Realizar la eliminación gaussiana para transformar la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior.
3. Asignar la matriz triangular superior obtenida en el paso anterior.
4. Calcular la solución del sistema de ecuaciones lineales utilizando la matriz triangular superior y el vector de términos independientes.
5. Mostrar la solución del sistema de ecuaciones lineales.

```
%CODIGO 2
clc,clear
% Ingreso de la matriz
matriz_coef = input('Ingrese la matriz de coeficientes de 3x3: ');

% Ingreso del vector de términos independientes
vector_indep = input('Ingrese el vector de términos independientes de 3x1:
');

% Eliminación gaussiana
for i = 1:3
pivote = matriz_coef(i,i);
matriz_coef(i,:) = matriz_coef(i,:) / pivote;
vector_indep(i) = vector_indep(i) / pivote;
for j = i+1:3
factor = matriz_coef(j,i);
matriz_coef(j,:) = matriz_coef(j,:) - factor * matriz_coef(i,:);
vector_indep(j) = vector_indep(j) - factor * vector_indep(i);
end
end

% Mostrar la matriz triangular superior
fprintf('La matriz triangular superior obtenida mediante eliminación
gaussiana es:\n')
disp(matriz_coef)

% Asignar matriz triangular superior
matriz_triang_superior = matriz_coef;

% Solución
x(3) = vector_indep(3) / matriz_triang_superior(3,3);
x(2) = (vector_indep(2) - matriz_triang_superior(2,3)*x(3)) /
matriz_triang_superior(2,2);
x(1) = (vector_indep(1) - matriz_triang_superior(1,2)*x(2) -
matriz_triang_superior(1,3)*x(3)) / matriz_triang_superior(1,1);

% Mostrar la solución del sistema
fprintf('La solución del sistema es: x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n',
x(1), x(2), x(3))
```

Vista de la ventana de comandos:


Command Window
Ingrese la matriz de coeficientes de 3x3:
[2 3 4;3 -5 -1;-1 2 -3]
Ingrese el vector de términos independientes de 3x1:
[20 -10 -6]
La matriz triangular superior obtenida mediante eliminación gaussiana es:
1.0000 1.5000 2.0000
0 1.0000 0.7368
0 0 1.0000
La solución del sistema es: x1 = 1.0000, x2 = 2.0000, x3 = 3.0000
>>

Explicación:

Algoritmo:

1. Primero, se solicita al usuario que ingrese la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.
2. Se realiza la eliminación gaussiana para obtener una matriz triangular superior a partir de la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.
3. La matriz triangular superior obtenida se almacena en una variable.
4. Se calcula la solución del sistema de ecuaciones lineales utilizando la matriz triangular superior y el vector de términos independientes.
5. La solución se almacena en un vector x que contiene los valores de las incógnitas x1, x2 y x3.

En cuanto a la eliminación gaussiana, se sigue el siguiente proceso:

1. Se recorren las filas de la matriz de coeficientes y se divide cada fila por su elemento diagonal correspondiente (pivote).
2. Se recorren las filas restantes por debajo de la fila actual y se restan múltiplos de la fila actual para eliminar los elementos debajo del pivote.
3. Se repite este proceso para todas las filas hasta obtener una matriz triangular superior.

Para el cálculo de la solución del sistema de ecuaciones lineales, se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Se calcula x3 a partir de la última fila de la matriz triangular superior y el último elemento del vector de términos independientes.
2. Se calcula x2 a partir de la penúltima fila de la matriz triangular superior, el valor de x3 calculado en el paso anterior y el penúltimo elemento del vector de términos independientes.
3. Se calcula x1 a partir de la primera fila de la matriz triangular superior, los valores de x2 y x3 calculados en los pasos anteriores y el primer elemento del vector de términos independientes.

Finalmente, se muestra la solución del sistema de ecuaciones lineales en la pantalla.

V. CONCLUSIONES

- El método de eliminación de Gauss es una técnica ampliamente utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- El método de Gauss es adecuado para sistemas de ecuaciones lineales con un número moderado de incógnitas. Sin embargo, su eficiencia puede disminuir si la matriz de coeficientes es muy grande o si presenta características especiales, como una estructura dispersa.
- MATLAB ofrece herramientas adicionales para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales más complejos, como matrices dispersas o sistemas sobredeterminados o subdeterminados.
- Al utilizar el método de Gauss en MATLAB, es importante tener en cuenta la estabilidad numérica. Las operaciones de punto flotante pueden introducir errores acumulativos, especialmente si la matriz de coeficientes es mal condicionada.